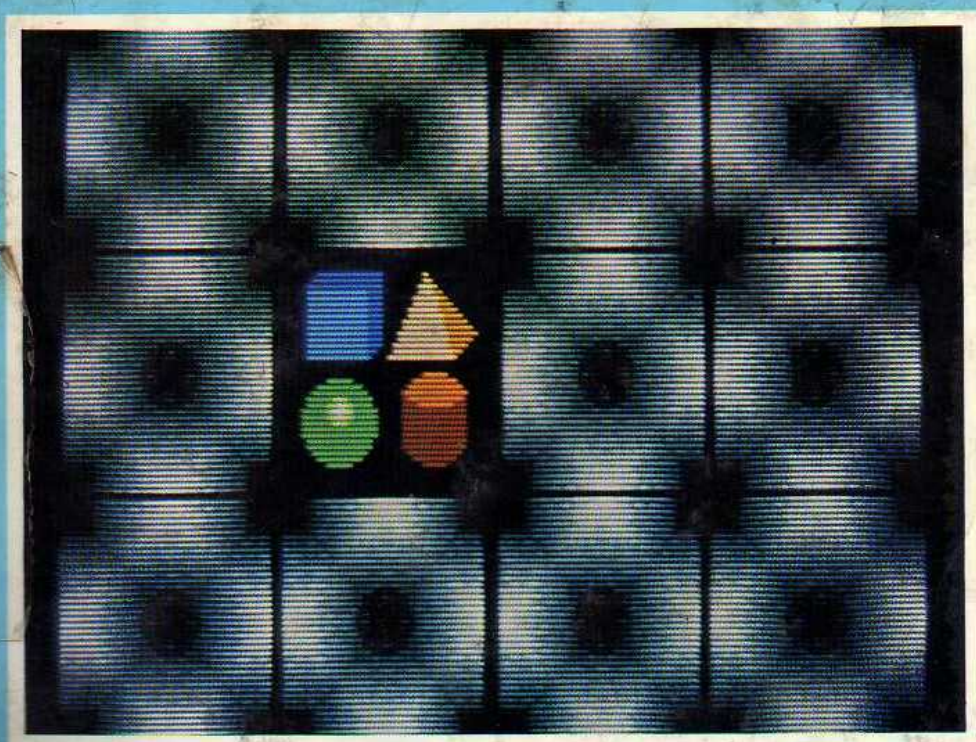
Schaum

GEOMETRÍA

Segunda Edición

Barnett Rich



McGraw Hill

Copia

M A

GEOMETRÍA

(incluye geometría plana, analítica, transformacional y de sólidos)

GEOMETRÍA

Segunda Edición

BARNETT RICH, Ph. D.
Presidente del Departamento de
Matemáticas
Brooklyn Technical High School
New York City

Revisado por:
Philip A. Schmidt, Ph. D.
Departamento de Educación Secundaria
State College at New Paltz
New Paltz, New York

Traducción:
Dr. Rafael Morones E.
Facultad Química, UNAM
Universidad de Glasgow, Escocia
Profesor de tiempo completo del
Departamento de Matemáticas
ITAM

Revisión Técnica:
Lic. Héctor [illegible] Hernández Valdés
Profesor de tiempo completo del
Departamento de Matemáticas y
Coordinador de Matemáticas [illegible]
ITAM

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

GEOMETRÍA

(incluye geometría plana, analítica, transformacional y de sólidos)

Segunda Edición

BARNETT RICH, Ph. D.
Presidente del Departamento de Matemáticas.
Brooklyn Technical High School
New York City

Revisado por:
Phillip A. Schmidt, Ph. D.
Departamento de Educación Secundaria
Suny College at New Paltz
New Paltz, New York

Traducción:
Dr. Rafael Morones E.
Facultad Química, UNAM
Universidad de Glasgow, Escocia
Profesor de tiempo completo del
Departamento de Matemáticas
ITAM

Revisión Técnica:
Lic. Héctor Cirilo Hernández Valdés
Profesor de tiempo completo del
Departamento de Matemáticas y
Coordinador de Matemáticas "O"
ITAM

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

GEOMETRÍA

Atlacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

ISBN 968-422-244-0
(ISBN 968-451-206-6 primera edición)

Traducido de la segunda edición en inglés de
SCHAUM'S OUTLINE OF GEOMETRY

ISBN 0-07-052246-4

9012345678 L.M.-90 9086543217

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en Junio de 1997 en
Litográfica 85, S.A. de C.V.
Fiscales Nº 43
Col. Sifón México, D.F.

Se tiraron 4100 ejemplares

Semblanza del autor

El Dr. Barnett Rich tiene el grado de Doctor en filosofía (Ph.D.) por la Universidad de Columbia y Doctor en Jurisprudencia (J.D.) por la Universidad de Nueva York. Comenzó su carrera profesional en Townsend Henir Hall High School de la ciudad de Nueva York, y fue uno de los prominentes organizadores de la preparatoria de música y arte donde se desempeñó como asistente administrativo. Posteriormente, se dedicó a la enseñanza en CUNY y en la Universidad de Columbia, y obtuvo el cargo de Jefe de Matemáticas en la preparatoria técnica de Brooklyn por 14 años. Entre sus muchos logros están los 6 grados que él ha conquistado y los 23 libros que ha escrito, entre ellos los libros de la serie Outlines de Schaum, *Elementary Algebra*, *Modern Elementary Algebra* y *Review of Elementary Algebra*.

Philip Schmidt obtuvo su licenciatura en el colegio de Brooklyn (con un curso de especialización sobre matemáticas), y su maestría en matemáticas y su Doctorado en Educación Matemática en la Universidad de Syracuse, fue profesor asociado en el Colegio Berea hasta 1985, y es actualmente profesor asociado de matemáticas en educación secundaria en el colegio SUNY de New Paltz.

Contenido

Prefacio

La versión original del libro de *Geometría Plana* de Barnett Rich ha sido reimprimida unas 22 veces desde que fue publicado originalmente en 1968. El reto al revisar este texto fue actualizar el material tantas veces como fuese necesario para que mantuviera la prosa y la pedagogía necesarias para su éxito. En el caso de *Geometría Plana*, el reto fue particularmente grande. El dominio de la geometría y su pedagogía por parte del Dr. Rich fue enorme. En conversaciones que he tenido con antiguos estudiantes y con colegas del Dr. Rich se ha afirmado que su habilidad para convertir las ideas en matemáticas fue insuperable.

En esta revisión he intentado mantener el "espíritu de explicación" de Barnett Rich mientras se ajusta el libro a lo que se enseña actualmente en escuelas y colegios. Las anotaciones y la terminología se han cambiado para igualar las currículas y los textos actuales. He cambiado las frases de "segmentos comunes" y "medición de ángulos" a las más comunes, y he realizado cambios textuales para apoyar esa terminología. Un capítulo sobre geometría transformada ha sido agregado, se ha suprimido material no actualizado y han sido modificados los problemas complementarios.

Agradezco a mucha gente por su ayuda durante esta revisión: a John Aliano, editor con más antigüedad en McGraw-Hill, por su gran confianza; a Brother Neal Golden, por su cuidadosa revisión a la primera edición; al Dr. Paul Zuckerman, quien me presentó a Jean Rich, esposa de Barnett Rich, quien a su vez me permitió el acceso a la biblioteca del Dr. Rich y ayudó con apoyo y amistad; a mi esposa Jan Z. Schmidt y a mi hijo Reed Schmidt, quienes han sido cariñosos apoyos en todo mi trabajo; y finalmente, al Dr. Rich por proporcionarme tan rico texto para revisar y por enseñar geometría tan significativamente a tanta gente.

PHILIP A. SCHMIDT
New Paltz, 1988

Prefacio a la primera edición en inglés

El propósito de este libro es el ser de gran ayuda para los alumnos en el aprendizaje de la Geometría y un excelente auxiliar didáctico para los maestros en la enseñanza de la materia.

PARA LOS ALUMNOS:

Este libro se ha diseñado para llevar a los alumnos más allá de los objetivos fijados por los libros ordinarios y convencionales sobre la materia. Los alumnos encontrarán de gran utilidad este texto:

— Al aprender cada regla, fórmula y principio

Cada regla, fórmula y principio se enuncia con claridad, se distingue del resto del texto, tiene relación con sus correlativos y se ilustra con claridad mediante el uso de ejemplos.

— Al estudiar cada conjunto de problemas resueltos

Cada conjunto de problemas resueltos se utiliza para clarificar y aplicar las reglas y principios más importantes. Su clasificación se indica con un título.

— Al integrar cada conjunto de problemas complementarios

Los problemas complementarios dan una explicación más amplia de las reglas y principios. Un número de referencia para cada conjunto remite al alumno al conjunto de problemas resueltos. Existen más de 200 problemas adicionales y las respuestas para cada problema se localizan al final del libro.

— Al integrar el estudio de la Geometría plana

Esta obra integra el estudio de la Geometría plana con la Aritmética, Álgebra, Trigonometría numérica, Geometría analítica y Lógica. Para llevar a cabo esta integración:

(a) Se dedica un capítulo para la Geometría analítica.

(b) Un capítulo con las pruebas desglosadas y los planos de cada teorema.

(c) Un capítulo que explica en forma detallada veintitrés construcciones geométricas básicas e incluye, conforme se van necesitando, principios geométricos elementales.

(d) Dos capítulos de métodos de comprobación y perfeccionamiento en los que se presentan las ideas fundamentales de la Lógica formal propias de este nivel.

(*e*) En este libro se insiste en la importancia de la Álgebra para la solución de problemas geométricos mediante el uso de simbolismos, ecuaciones y comprobaciones algebraicas.

— Al aprender la Geometría por medio del estudio autodidacta

La estructura del libro favorece el autodidactismo. Al alumno avanzado le permite alcanzar los objetivos de un curso normal en menos tiempo. A los alumnos menos capaces, la presentación de diversos ejemplos y soluciones proporcionan la ayuda necesaria para superar sus deficiencias y de esta forma continuar con el curso y, al mismo tiempo, obtener cierta habilidad y confianza.

— Al ampliar la Geometría plana a la Geometría espacial

Se incluye un capítulo para la extensión de la geometría de dos planos a la geometría tridimensional. En la actualidad, y muy en especial en esta etapa, es muy importante que el alumno comprenda que los principios fundamentales del espacio son el resultado de los principios aprendidos en la Geometría plana.

PARA EL MAESTRO:

Los maestros de Geometría encontrarán de suma utilidad este texto:

— Al enseñar cada capítulo

Existe un tema central unificador en cada capítulo. Éste, a su vez, tiene de dos a diez subdivisiones. Estas últimas se ordenaron de acuerdo a su grado de dificultad para mejorar la enseñanza.

— Al enseñar cada subdivisión

Cada subdivisión contiene el material y los problemas necesarios para impartir una lección completa desarrollando los principios relativos.

— Al hacer la enseñanza más eficaz

El uso apropiado de los problemas resueltos permite a los alumnos entender la forma en que los principios se aplican en situaciones diversas. Por medio de la solución de problemas se aprenden las Matemáticas correctamente —haciendo Matemáticas—. Para que la clase logre su objetivo, los alumnos deben anotar las soluciones y entender el porqué y el cómo de cada paso. Una vez que el alumno comprende el cómo se aplica un principio a un problema resuelto, estará listo para aplicarlo a un problema complementario. La Geometría no se aprende a través de la lectura de un libro de texto o la memorización de un conjunto de fórmulas. No es hasta que se han solucionado gran variedad de problemas relativos al tema cuando el alumno obtiene una mejor comprensión de la Geometría plana.

— Al hacer la enseñanza más eficaz por medio del trabajo en casa

La preparación de la clase y la realización de tareas relativas a los problemas se facilita gracias a que los problemas complementarios de este libro se relacionan con los problemas resueltos. Se debe dar mucha atención al principio rector y a los pasos más importantes que se siguieron para la solución de los problemas resueltos. Después de esto, el alumno puede repetirlos y más tarde hacer los problemas complementarios que se relacionan con los anteriores.

OTROS QUE ENCONTRARÁN MUY ÚTIL ESTE LIBRO:

Además de los maestros y alumnos, este libro puede ser de gran utilidad para otras personas. Este grupo incluye a los padres de los estudiantes de Geometría que deseen ayudar a sus hijos apoyándose en los materiales autodidactas del libro o que quieran repasar sus conocimientos sobre la materia para auxiliar a sus hijos adecuadamente; a los jefes de departamento que quieran enriquecer su material bibliográfico en Geometría o que quieran mejorar la calidad de la enseñanza de la materia, y a las personas que se esfuerzan por repasar el tema o que desean estudiarlo por su propia cuenta.

1

Líneas, ángulos y triángulos

1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA GEOMETRÍA

La palabra *geometría* se deriva de los vocablos griegos *geos* (tierra) y *metron* (medida). Los antiguos egipcios, chinos, babilonios, romanos y griegos utilizaron la geometría en la agrimensura, navegación, astronomía y otras labores prácticas.

Los griegos trataron de sistematizar los datos geométricos que conocían estableciendo razones lógicas y relaciones entre ellos. El trabajo para sistematizar los hechos y principios geométricos por hombres como Tales de Mileto (600 a. de J.), Pitágoras (540 a. de J.), Platón (390 a. de J.) y Aristóteles (350 a. de J.) culminó con el texto sobre geometría intitulado: *Elementos*, escrito por Euclides alrededor de 325 a. de J. Este texto tan extraordinario se ha utilizado por más de 2 000 años.

1.2 TÉRMINOS INDEFINIDOS DE LA GEOMETRÍA: PUNTO, LÍNEA Y PLANO

1.2A Punto, línea y plano son términos indefinidos

En estos términos indefinidos se basa la definición de todos los términos geométricos. Se les puede dar un significado por medio de descripciones. Sin embargo, las descripciones que aparecen en seguida no deben considerarse como definiciones.

1.2B Punto

Un punto sólo tiene posición. No tiene longitud, anchura o grosor.

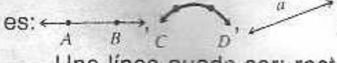
Se representa al punto por medio de un "punto dibujado". No debe olvidarse, sin embargo, que el "punto dibujado" *representa* al concepto de punto pero *no es* un punto conceptualmente, al igual que un "punto dibujado" en un mapa representa una localidad pero no es la localidad misma. Un "punto dibujado", a diferencia de un punto conceptual, tiene tamaño.

Se designa al punto conceptual por medio de una letra mayúscula junto al punto dibujado, esto es: A P

1.2C Línea

Una línea tiene longitud pero no anchura o grosor.

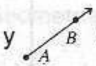
Una línea puede representarse por medio de un gis en una pizarra o por una banda de caucho estirada.

Una línea se designa con letras mayúsculas en dos puntos cualesquiera sobre ella o con una letra minúscula; esto es:  o $\overleftrightarrow{AB}$.

Una línea puede ser: recta, curva, o una combinación de ambas. Para entender cómo difieren las líneas, piense en que una línea se genera por un punto en movimiento. Una *línea recta*, tal como $\longleftrightarrow$, es generada por un punto que se mueve siempre en la misma dirección. Una *línea curva*, tal como ⌒, por un punto que se mueve cambiando de dirección continuamente.

Dos líneas se intersectan en un punto.

Una línea recta puede extenderse en forma ilimitada; en cualquier dirección indefinidamente.

Un *rayo* es la parte de una línea recta que comienza en un punto dado y que se extiende en forma ilimitada en una dirección: $\overrightarrow{AB}$ y  designan rayos.

En este libro, a menos que se indique otra cosa, se utilizará la palabra *línea* para representar una "línea recta".

1.2D Planos

Un plano tiene longitud y anchura pero no espesor. Puede representarse por medio de una pizarra o el lado de una caja; sin embargo, recuerde que éstas son representaciones del plano, pero no planos realmente.

Una superficie plana (o plano) es una superficie tal que si una línea recta conecta dos puntos cualesquiera, ésta queda contenida en ella en forma total. Un plano es una superficie plana.

La geometría plana es la geometría de las figuras planas —aquéllas que pueden trazarse sobre un plano. A menos que se indique otra cosa, en este libro la palabra *figura* significará "figura plana".

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1 Ilustración de Términos Indefinidos

Punto, línea y plano son términos indefinidos. Indique cuál de estos términos se ilustra con: (*a*) la cubierta de un escritorio; (*b*) una pantalla cinematográfica; (*c*) el filo de una regla; (*d*) un hilo en tensión; (*e*) la punta de un alfiler.

Soluciones

(*a*) Plano (*b*) plano (*c*) línea (*d*) línea (*e*) punto.

1.3 SEGMENTOS DE LÍNEA

Un segmento de línea es la parte entre dos puntos de una línea recta, incluyendo estos dos puntos. Se designa por las letras mayúsculas que representan a estos puntos o por una letra minúscula. Así $\overline{AB}$ o r representan el segmento de línea $A\overset{r}{\text{——}}B$ entre A y B.

La expresión *segmento de línea recta* puede restringirse a *segmento de línea* o *segmento*, si el significado es claro. De esta forma, $\overline{AB}$ y *segmento AB* significan "el segmento de línea recta AB".

1.3A División de un segmento de línea en partes

Si dividimos un segmento de línea en partes:

1. La longitud del segmento completo es igual a la suma de las longitudes de sus partes. Nótese que la longitud de $\overline{AB}$ se designa por AB.
2. La longitud del segmento de línea completo es mayor que la longitud de cualquiera de sus partes.

Supóngase que $\overline{AB}$ se divide en tres partes de longitud a, b, y c, esto es: $A\overset{a}{\text{——}}\overset{b}{\text{——}}\overset{c}{\text{——}}B$. Entonces $AB = a + b + c$. También, AB es mayor que a; lo que se denota como: $AB > a$.

Si n segmento de línea se divide en dos partes iguales:

1. El punto de división es el punto medio del segmento de la línea.
2. Se dice que una línea bisecta el segmento cuando pasa por el punto medio de un segmento.

Como $AM = MB$ en la figura 1-1, M es el punto medio de $\overline{AB}$, y $\overline{CD}$ bisecta a $\overline{AB}$. Puede observarse que dos segmentos de línea son iguales marcando en ellos el mismo número de trazos equidistantes. Nótese que $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$ están marcadas con un solo trazo.

3. Si tres puntos A, B y C están sobre una línea, decimos que son *colineales*. Si A, B y C son colineales y $AB + BC = AC$, entonces B está entre A y C (Fig. 1-2).

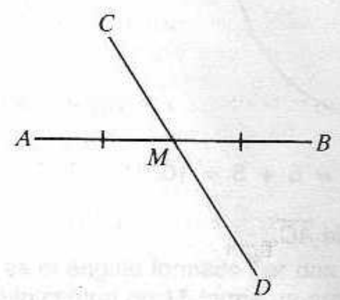


Fig. 1-1

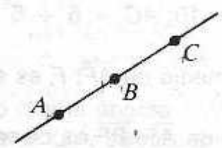


Fig. 1-2

1.3B Segmentos congruentes

Se dice que dos segmentos de línea son *congruentes* si tienen la misma longitud. De aquí que, si $AB = CD$, entonces $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$, y se denota como $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.2 IDENTIFICACIÓN DE SEGMENTOS DE LÍNEA Y PUNTOS
(Fig. 1-3.)

(*a*) Identifique cada uno de los segmentos de línea indicados.

(*b*) Identifique los segmentos de línea que se intersectan en A.

(*c*) ¿Qué otro segmento de línea se puede trazar?

(*d*) Identifique el punto de intersección de $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$.

(*e*) Identifique el punto de intersección de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$.

Soluciones

(*a*) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$. Estos segmentos pueden designarse intercambiando las letras; por lo que $\overline{BA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DC}$ $\overline{CA}$ y $\overline{DA}$ son correctos también.

(*b*) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$

(*c*) $\overline{BD}$

(*d*) D

(*e*) C

1.3 Cálculo de Longitudes y Puntos en Segmentos de Línea

(Fig. 1-4)

(*a*) Calcule la longitud de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AF}$

(*b*) Identifique dos puntos medios.

(*c*) Identifique dos bisectores.

(*d*) Identifique todos los segmentos congruentes.

Soluciones

(a) $AB = 3 + 7 = 10$; $AC = 5 + 5 + 10 = 20$; $AF = 5 + 5 = 10$.

(*b*) E es el punto medio de $\overline{AF}$; F es el punto medio de $\overline{AC}$.

(*c*) $\overline{DE}$ es bisector de $\overline{AF}$; $\overline{BF}$ es bisector de $\overline{AC}$.

(*d*) $\overline{AB}$, $\overline{AF}$, y $\overline{FC}$ (todos tienen longitud 10); $\overline{AE}$ y $\overline{EF}$ (los dos tienen longitud 5).

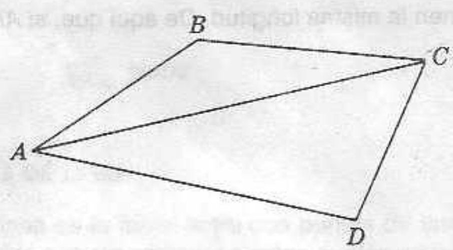


Fig. 1-3

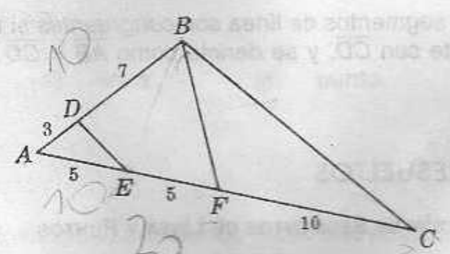


Fig. 1-4

1.4 CÍRCULOS

Un *círculo* es el conjunto en que todos los puntos de un plano son equidistantes de un punto fijo denominado *centro*. El símbolo para un círculo es ⊙; para círculos, ⊚. Así ⊙O representa al círculo cuyo centro es O.

La *circunferencia* de un círculo es la distancia alrededor del círculo (su perímetro). Contiene 360 grados (360°).

Radio es el segmento que une el centro del círculo con un punto sobre el círculo (Fig. 1-5). De la definición de círculo, se deduce que los radios de un círculo son congruentes. Así $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, y $\overline{OC}$ en la figura 1-5 son radios de ⊙Q y $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$.

Una *cuerda* es el segmento que une dos puntos cualesquiera de un círculo. Así $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son cuerdas de ⊙Q.

Un *diámetro* es una cuerda que pasa por el centro de un círculo; es la cuerda más grande y tiene el doble de longitud del radio. $\overline{AC}$ es un diámetro de ⊙O.

Un *arco* es una parte continua de un círculo. El símbolo del arco es ⌒, de tal manera que AB representa el arco AB. Un arco que mide 1° es 1/360 de una circunferencia.

Un *semicírculo* es un arco que mide la mitad de la circunferencia de un círculo; y, por lo tanto, contiene 180°. Un diámetro divide al círculo en dos semicírculos. Por ejemplo, el diámetro $\overline{AC}$ corta a ⊙O de la figura 1-5 en dos semicírculos.

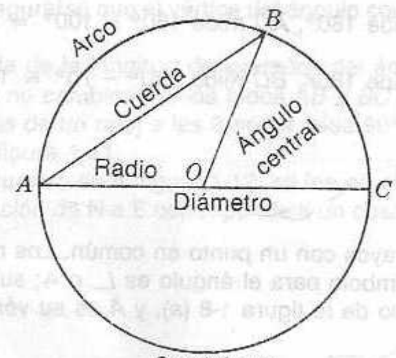


Fig. 1-5

Un *ángulo central* es el ángulo formado por dos radios. De modo que el ángulo entre los radios $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ es un ángulo central. Un ángulo central de 1° forma un arco de 1°; así, si el ángulo central entre $\overline{OE}$ y $\overline{OF}$ en la figura 1-6 es de 1°, entonces el arco EF mide 1°.

Los *círculos congruentes* son círculos con radios congruentes. De modo que si $\overline{OE} \cong \overline{O'G}$, entonces $\odot O \cong \odot O'$.

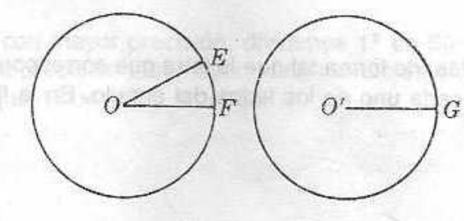


Fig. 1-6

PROBLEMAS RESUELTOS

1.4 Determinación de Líneas y Arcos en un Círculo

En la figura 1-7, calcule: (*a*) la longitud de OC y AB; (*b*) la cantidad de grados en $\widehat{AD}$ y (*c*) la cantidad de grados en BC.

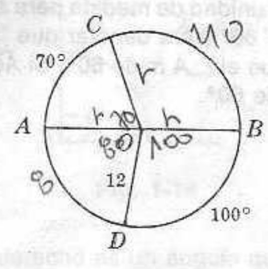


Fig. 1-7

Soluciones

(*a*) Radio OC = radio OD = 12. Diámetro AB = 24.

(*b*) Como el semicírculo *ADB* mide 180°, $\widehat{AD}$ mide 180° − 100° = 80°.

(*c*) Como el semicírculo *ACB* mide 180°, $\widehat{BC}$ mide 180° − 70° = 110°.

1.5 ÁNGULOS

Un ángulo es la figura formada por dos rayos con un punto en común. Los rayos son los *lados* del ángulo, mientras que el punto terminal es su *vértice*. El símbolo para el ángulo es $\angle$ o ∡; su plural es $\angle$s.

Así $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados del ángulo de la figura 1-8 (*a*), y *A* es su vértice.

1.5A Notación de ángulos

Un ángulo se puede designar de las siguientes formas:

1. Por medio de la letra del vértice, en el caso de que sólo exista un ángulo con este vértice, como $\angle B$ en la figura 1-8(*b*).

2. Por medio de una letra minúscula, colocada entre los lados del ángulo y cerca de su vértice, como $\angle a$ o $\angle 1$ en la figura 1-8(*c*).

3. Por medio de tres letras mayúsculas; de forma tal que la letra que corresponde al vértice, esté entre las otras dos, correspondiendo estas últimas a cada uno de los lados del ángulo. En la figura 1-8(*d*), $\angle E$ puede denominarse como $\angle DEG$ o $\angle GED$.

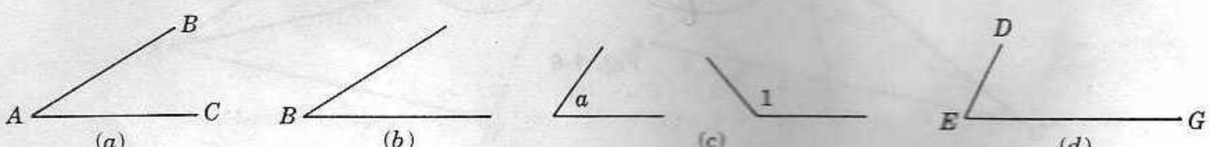


Fig. 1-8

1.5B Medición de ángulos

El tamaño de un ángulo depende de qué tanto debe rotarse uno de sus lados alrededor del vértice, hasta que coincida con el otro lado. Hemos escogido al grado como unidad de medida para ángulos. La medida de un ángulo es el número de grados que contiene. Escribiremos $m\angle A = 60°$ para denotar que "el ángulo *A* mide 60°".

El transportador en la figura 1-9 muestra que el $\angle A$ mide 60°. Si $\overrightarrow{AC}$ es rotado alrededor del vértice *A*, hasta que coincida con $\overrightarrow{AB}$, la medida de rotación sería de 60°.

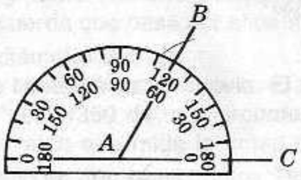


Fig. 1-9

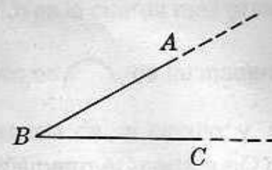


Fig. 1-10

Al utilizar un transportador, debe asegurarse que el vértice del ángulo coincida con el centro y que un lado coincida con el diámetro 0°-180°.

El tamaño de un ángulo *no* depende de la longitud de los lados del ángulo.

El tamaño de $\angle B$ en la figura 1-10 no cambiaría si los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ fueran más largos o cortos.

El ángulo formado por las manecillas de un reloj a las 3 horas mide 90°, sin importar qué tan grande o pequeño sea el reloj, tal como se muestra en la figura 1-11.

La brújula de navegación, que se muestra en la figura 1-12, se lee en el sentido de las manecillas del reloj de 0° a 360°, empezando en el norte. Una rotación de N a E corresponde a un cuarto de vuelta o 90°; una de NE a E corresponde a un octavo de vuelta o 45°.

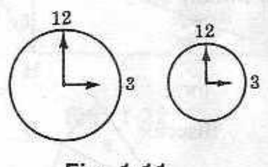


Fig. 1-11

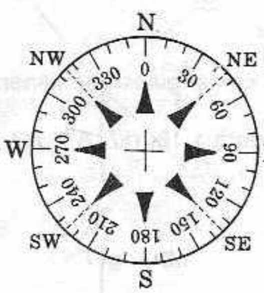


Fig. 1-12

Con el objeto de medir ángulos con mayor precisión, dividimos 1° en 60 partes iguales, denominadas *minutos*. Así, 1° = 60 minutos = 60'. Para una precisión aún mayor, cada minuto se divide en 60 partes iguales denominadas *segundos*. De esta forma, tenemos que 1° = 60' y 1' = 60".

1.5C Tipos de ángulos

1. *Ángulo agudo:* un ángulo agudo es un ángulo que mide menos de 90°.
   Por lo tanto, en la figura 1-13, $a°$ es menor de 90°; esto se denota como $a° < 90°$.

2. *Ángulo recto:* un ángulo recto es un ángulo que mide 90°.
   En la figura 1-14, $m(\text{rt. } \angle A) = 90°$. La esquina rectangular denota un ángulo recto.

3. *Ángulo obtuso:* un ángulo obtuso es un ángulo que mide más de 90° y menos de 180°.
   En la figura 1-15, 90° es menor que $b°$ y $b°$ es menor que 180°; esto se denota por $90° < b° < 180°$.

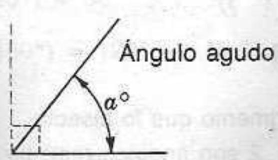


Fig. 1-13

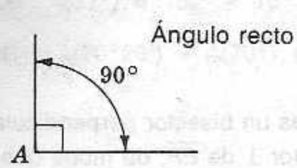


Fig. 1-14

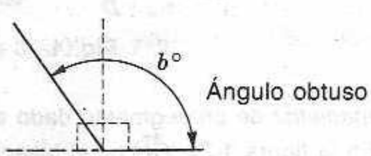


Fig. 1-15

4. *Ángulo derecho o rectilíneo:* un ángulo derecho es un ángulo que mide 180°.
   Así, en la figura 1-16, $m(\text{st. } \angle B) = 180°$. Nótese que los lados de un ángulo derecho están en la misma línea recta; pero no confunda un ángulo derecho con una línea recta.

5. *Ángulo reflejo:* un ángulo reflejo es un ángulo que mide más de 180° y menos de 360°.
   En la figura 1-17, 180° es menor de $c°$ y $c°$ es menor de 360°; esto se denota como $180° < c° < 360°$.

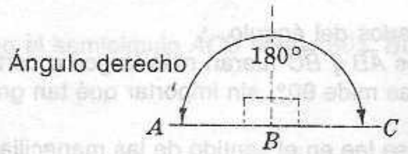


Fig. 1-16

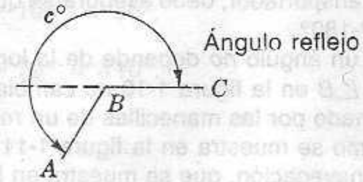


Fig. 1-17

1.5D Más sobre ángulos

1. *Ángulos congruentes:* son ángulos que tienen el mismo número de grados. En otras palabras, si $m\angle A = m\angle B$, entonces $\angle A \cong \angle B$.
   Entonces en la figura 1-18, rt.$\angle A \cong$ rt.$\angle B$ ya que ambos miden 90°.

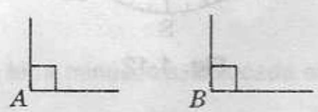


Fig. 1-18

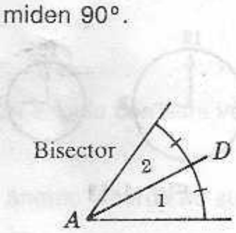


Fig. 1-19

2. *Bisectriz* es una línea que divide un ángulo en dos partes congruentes.
   Así, en la figura 1-19, si $\overline{AD}$ bisecta a $\angle A$, entonces $\angle 1 \cong \angle 2$. (Puede comprobarse que dos ángulos son congruentes marcando sus arcos con el mismo número de trazos equidistantes. Aquí los arcos de $\angle^s$ 1 y 2 están marcados con un solo trazo.)

3. *Perpendiculares:* son líneas, rayos o segmentos que se intersectan formando ángulos rectos.
   El símbolo para una perpendicular es $\perp$; para varias perpendiculares, $\perp^s$. En la figura 1-20, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, de tal manera que se forman los ángulos rectos 1 y 2.

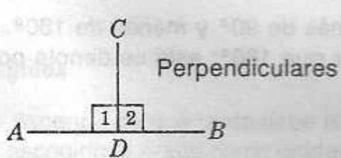


Fig. 1-20

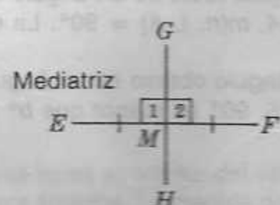


Fig. 1-21

4. Una *mediatriz* de un segmento dado es un bisector perpendicular al segmento que lo bisecta.
   En la figura 1-21, $\overleftrightarrow{GH}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{EF}$; de modo que $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos rectos y M es el punto de $\overline{EF}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.5 Identificación de Ángulos

Identifique los siguientes ángulos en la figura 1-22: (*a*) dos ángulos obtusos; (*b*) un ángulo recto; (*c*) un ángulo derecho; (*d*) un ángulo agudo en *D*; (*e*) un ángulo agudo en *B*.

Soluciones

(*a*) $\angle ABC$ y $\angle ADB$ (o $\angle 1$). Es posible designar a los ángulos cambiando el orden de las letras: $\angle CBA$ y $\angle BDA$.

(*b*) $\angle DBC$

(*c*) $\angle ADC$

(*d*) $\angle 2$ o $\angle BDC$

(*e*) $\angle 3$ o $\angle ABD$

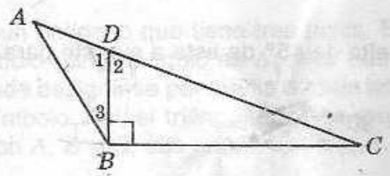


Fig. 1-22

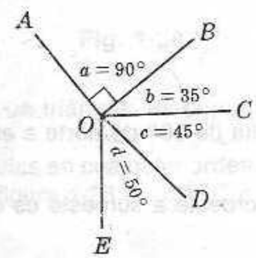


Fig. 1-23

1.6 Adición y Resta de Ángulos

En la figura 1-23, calcule (*a*) $m\angle AOC$, (*b*) $m\angle BOE$, (*c*) la magnitud del ángulo obtuso $\angle AOE$.

Soluciones

(*a*) $m\angle AOC = m\angle a + m\angle b = 90° + 35° = 125°$

(*b*) $m\angle BOE = m\angle b + m\angle c + m\angle d = 35° + 45° + 50° = 130°$

(*c*) $m\angle AOE = 360° - (m\angle a + m\angle b + m\angle c + m\angle d) = 360° - 220° = 140°$

1.7 Cálculo de Partes de Ángulos

Calcule: (*a*) $\frac{2}{5}$ de un $\angle$ recto; (*b*) $\frac{2}{3}$ de un $\angle$ derecho; (*c*) $\frac{1}{2}$ de 31°; (*d*) $\frac{1}{10}$ de 70°20'.

Soluciones

(*a*) $\frac{2}{5}(90°) = 36°$

(*b*) $\frac{2}{3}(180°) = 120°$

(*c*) $\frac{1}{2}(31°) = 15\frac{1}{2}° = 15°30'$

(*d*) $\frac{1}{10}(70°20') = \frac{1}{10}(70°) + \frac{1}{10}(20') = 7°2'$

1.8 Cálculo de Rotaciones

En media hora, ¿qué rotación realiza: (*a*) el minutero y (*b*) la manecilla que marca las horas de un reloj? ¿Qué rotación se necesita para voltear: (*c*) del norte al sureste en dirección de las manecillas del reloj; (*d*) del noroeste al suroeste en dirección contraria a las manecillas del reloj (Fig. 1-24)?

Soluciones

(*a*) En 1 hora, el minutero completa un círculo de 360°. Por lo que en media hora recorre 180°.

(*b*) En 1 hora, la manecilla de las horas recorre $\frac{1}{12}$ de 360° o 30°. Por lo que en media hora recorre 15°.

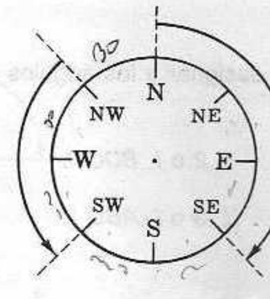


Fig. 1-24

(*c*) Sume una vuelta de 90° de norte a este y una vuelta de 45° de este a sureste para obtener 90° + 45° = 135°.

(*d*) La vuelta de noroeste a suroeste es de $\frac{1}{4}(360°) = 90°$.

1.9 Medición de ángulos

Encuentre la medida del ángulo formado por las manecillas del reloj en la figura 1-25, (*a*) cuando el reloj marca las 8 y (*b*) cuando el reloj marca las 4:30.

Soluciones

(*a*) Cuando el reloj marca las 8, $m\angle a = \frac{1}{3}(360°) = 120°$.

(*b*) Cuando el reloj marca las 4:30, $m\angle b = \frac{1}{2}(90°) = 45°$.

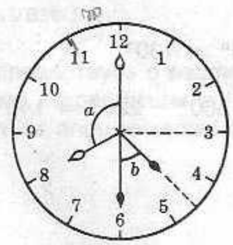


Fig. 1-25

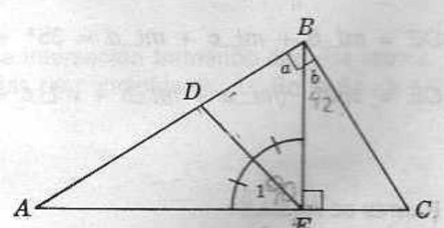


Fig. 1-26

1.10 Aplicación de ángulos equivalentes

En la figura 1-26, (*a*) identifique dos pares de segmentos perpendiculares; (*b*) calcule $m\angle a$ si $m\angle b = 42°$; (*c*) calcule $m\angle AEB$ y $m\angle CED$.

Soluciones

(*a*) Como $\angle ABC$ es un ángulo recto, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$. Como $\angle BEC$ es un ángulo recto, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$.

(*b*) $m\angle a = 90° - m\angle b = 90° - 42° = 48°$.

(*c*) $m\angle AEB = 180° - m\angle BEC = 180° - 90° = 90°$. $m\angle CED = 180° - m\angle 1 = 180° - 45° = 135°$.

1.6 TRIÁNGULOS

Un *polígono* es una figura plana cerrada y acotada; que tiene por lados segmentos de líneas rectas. Así, la figura 1-27 muestra un polígono de cinco lados, denominado *pentágono*; se le designa como pentágono *ABCDE*, con las literales en el orden que aparecen.

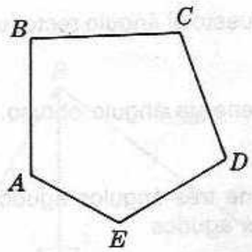


Fig. 1-27

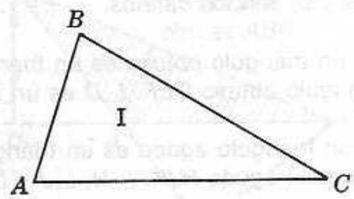


Fig. 1-28

Un *triángulo* es un polígono que tiene tres lados. El *vértice* de un triángulo es el punto en el que se juntan dos de sus lados. El símbolo para triángulo es $\triangle$; para triángulos, $\triangle\!\!\!\triangle$.

Un triángulo puede designarse por medio de tres letras mayúsculas en cualquier orden o por medio de un número romano dentro del símbolo. Así, el triángulo que se muestra en la figura 1-28 es $\triangle ABC$ o $\triangle$I; sus lados son $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$; sus vértices son A, B y C; sus ángulos son $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

1.6A Clasificación de triángulos

Los triángulos se clasifican de acuerdo a los lados iguales que tienen o de acuerdo al tipo de ángulos que poseen.

Triángulos de acuerdo al número de lados iguales que tienen (Fig. 1-29)

1. *Triángulo escaleno:* un triángulo escaleno es un triángulo que no tiene lados congruentes.
   Así en el triángulo escaleno ABC, $a \neq b \neq c$. La letra minúscula utilizada para denotar cada uno de sus lados corresponde a la letra mayúscula del vértice opuesto a éstos. Asimismo $\neq$ significa ''distinto de''.

2. *Triángulo isósceles:* un triángulo isósceles es un triángulo que tiene al menos dos lados congruentes.
   Así, en un triángulo isósceles ABC, $a = c$. Tales lados iguales se conocen como los *lados* del triángulo isósceles. El lado principal es la *base b*. Los ángulos de cada lado de la base son los *ángulos base*; el ángulo opuesto a la base es el ángulo *vértico o vértice*.

3. *Triángulo equilátero:* un triángulo equilátero es un triángulo que tiene tres lados congruentes.
   Así, en el triángulo equilátero ABC, $a = b = c$. Nótese que un triángulo equilátero es un triángulo isósceles también.

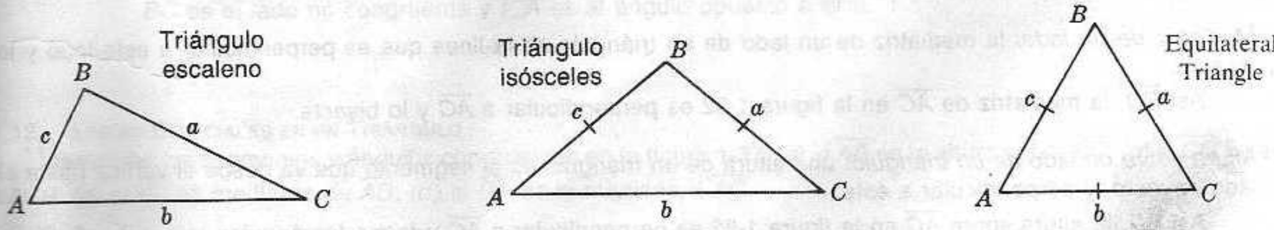


Fig. 1-29

Clasificación de triángulos de acuerdo al tipo de ángulos que contienen (Fig. 1-30)

1. *Triángulo rectángulo:* un triángulo rectángulo es un triángulo que contiene un ángulo recto.

Así, en el triángulo ABC, $\angle C$ es el ángulo recto. El lado c, opuesto al ángulo recto, es la *hipotenusa*. Los lados perpendiculares, a y b, son los *catetos*.

2. *Triángulo obtuso:* un triángulo obtuso es un triángulo que contiene un ángulo obtuso.
   Así, en el triángulo obtuso DEF, $\angle D$ es un ángulo obtuso.

3. *Triángulo agudo:* un triángulo agudo es un triángulo que contiene tres ángulos agudos.
   Así, en el triángulo agudo HJK, $\angle H$, $\angle J$ y $\angle K$ son ángulos agudos.

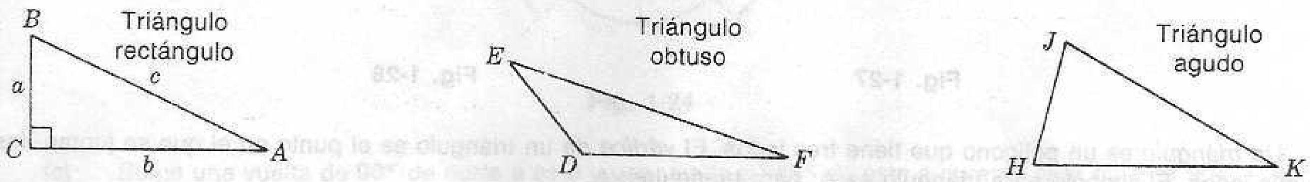


Fig. 1-30

1.6B Líneas especiales en un triángulo

1. *Bisectriz de un ángulo de un triángulo:* la bisectriz de un ángulo de un triángulo es el segmento o rayo que bisecta un ángulo y se extiende hasta el lado opuesto.
   Así $\overline{BD}$, la bisectriz de $\angle B$ en la figura 1-31, bisecta $\angle B$, haciendo $\angle 1 = \angle 2$.

2. *Mediana de un triángulo:* la mediana de un triángulo es el segmento que va del vértice al punto medio del lado opuesto.
   Así $\overline{MB}$, la mediana a $\overline{AC}$, en la figura 1-32, bisecta a $\overline{AC}$, haciendo $AM = MC$.

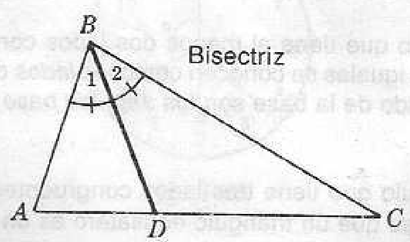


Fig. 1-31

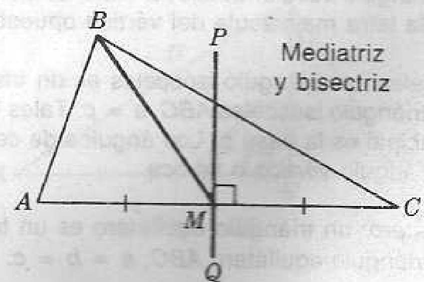


Fig. 1-32

3. *Mediatriz de un lado:* la mediatriz de un lado de un triángulo es la línea que es perpendicular a este lado y lo bisecta.
   Así $\overleftrightarrow{PQ}$, la mediatriz de $\overline{AC}$ en la figura 1-32 es perpendicular a $\overline{AC}$ y lo bisecta.

4. *Altura sobre un lado de un triángulo:* una altura de un triángulo es el segmento que va desde el vértice hasta el lado opuesto, y perpendicular a éste.
   Así $\overline{BD}$, la altura sobre $\overline{AC}$ en la figura 1-33 es perpendicular a $\overline{AC}$ y forma los ángulos rectos 1 y 2. Cada bisectriz, mediana y altura de un triángulo van desde el vértice al lado opuesto.

5. *Alturas de triángulos obtusos:* en un triángulo obtuso, las alturas trazadas sobre cualquiera de los lados del ángulo obtuso, sale del triángulo.
   Así, en el triángulo obtuso ABC (ashurado) en la figura 1-34, las alturas $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ están fuera del triángulo. En cada caso, un lado del ángulo obtuso debe extenderse.

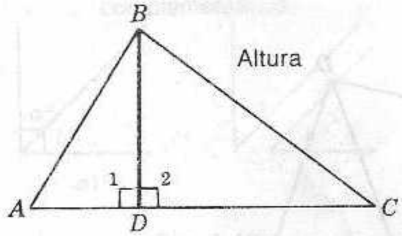


Fig. 1-33

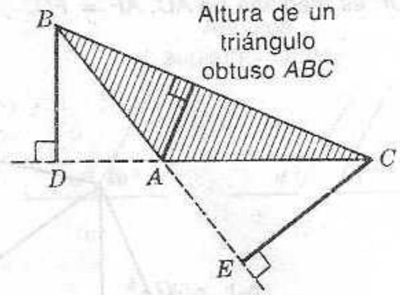


Fig. 1-34

PROBLEMAS RESUELTOS

1.11 Identificación de Triángulos y sus Partes

En la figura 1-35, identifique (*a*) un triángulo obtuso, y (*b*) dos triángulos rectángulos y la hipotenusa y catetos de cada uno. (*c*) En la figura 1-36, identifique dos triángulos isósceles; además identifique los lados congruentes, el lado no congruente y el vértice opuesto a éste último.

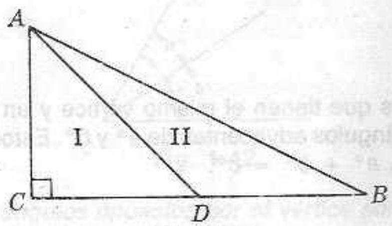


Fig. 1-35

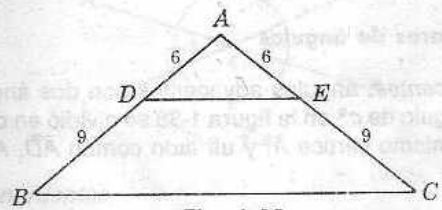


Fig. 1-36

Soluciones

(*a*) Como $\angle ADB$ es un ángulo obtuso, $\triangle ADB$ o $\triangle$II es obtuso.

(*b*) Como $\angle C$ es un ángulo recto, $\triangle$I y $\triangle ABC$ son triángulos rectángulos. En $\triangle$I, $\overline{AD}$ es la hipotenusa y $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ son los catetos. En $\triangle ABC$, $\overline{AB}$ es la hipotenusa y $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los catetos.

(*c*) Como $AD = AE$, $\triangle ADE$ es un triángulo isósceles. En $\triangle ADE$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ son los lados congruentes, $\overline{DE}$ es el lado no congruente y $\angle A$ es el ángulo opuesto a éste.

Como $AB = AC$, $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles. En $\triangle ABC$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son los lados congruentes, $\overline{BC}$ es el lado no congruente y $\angle A$ es al ángulo opuesto a éste.

1.12 Líneas Especiales en un Triángulo

Identifique los segmentos y ángulos congruentes en la figura 1-37, (*a*) si $\overline{AE}$ es la altura sobre $\overline{BC}$; (*b*) si $\overline{CG}$ bisecta $\triangle ACB$; (*c*) si $\overline{KL}$ es mediatriz de $\overline{AD}$; (*d*) si $\overline{DF}$ es la mediana a $\overline{AC}$.

Soluciones

(*a*) Como $\overline{AE} \perp \overline{BC}$, $\angle 1 \cong \angle 2$.

(*b*) Como $\overline{CG}$ bisecta $\angle ACB$, $\angle 3 \cong \angle 4$.

(*c*) Como $\overline{LK}$ es la mediatriz de AD, $AL = LD$ y $\angle 7 \cong \angle 8$.

(*d*) Como $\overline{DF}$ es mediana de $\overline{AC}$, $AF = FC$.

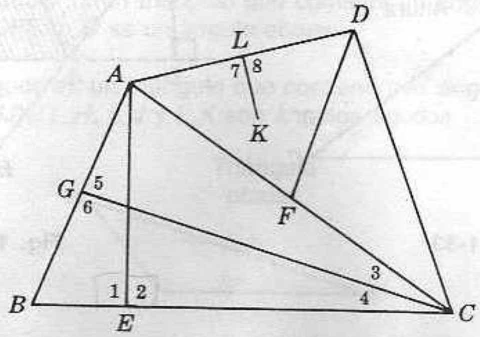


Fig. 1-37

1.7 PAREJAS DE ÁNGULOS

1.7A Tipos de pares de ángulos

1. *Ángulos adyacentes*: ángulos adyacentes son dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado en común.
   Así, el ángulo de $c°$ en la figura 1-38 se dividió en dos ángulos adyacentes de $a°$ y $b°$. Estos ángulos adyacentes tienen el mismo vértice A, y un lado común $\overrightarrow{AD}$. Aquí, $a° + b° = c°$.

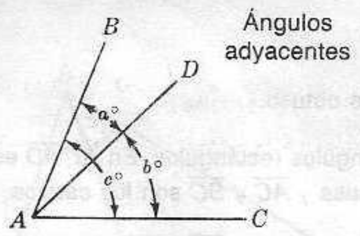


Fig. 1-38

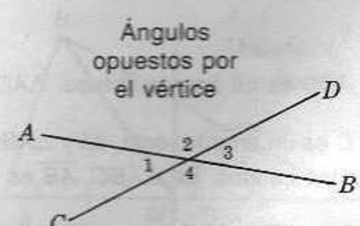


Fig. 1-39

2. *Ángulos opuestos por el vértice*: los ángulos opuestos por el vértice son dos ángulos no adyacentes formados por dos líneas que se intersectan.
   Por consiguiente, $\angle 1$ y $\angle 3$ en la figura 1-39, son ángulos opuestos por el vértice formados por la intersección de las líneas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$. Además, $\angle 2$ y $\angle 4$ son otro par de ángulos opuestos por el vértice formados por las mismas líneas.

3. *Ángulos complementarios*: Los ángulos complementarios son dos ángulos que suman un total 90°.
   Así, en la figura 1-40 (*a*) los ángulos $a°$ y $b°$ son ángulos complementarios adyacentes. Sin embargo, en (*b*) los ángulos complementarios no son adyacentes. En ambos casos, $a° + b° = 90°$. A cualesquiera de los dos ángulos complementarios se le denomina como el *complemento* del otro.

4. *Ángulos suplementarios*: los ángulos suplementarios son dos ángulos que suman en total 180°.
   Por lo tanto, en la figura 1-41 (*a*) los ángulos $a°$ y $b°$ son ángulos suplementarios adyacentes. Sin embargo, en (*b*) los ángulos suplementarios no son adyacentes. En ambos casos, $a° + b° = 180°$. A cualesquiera de los dos se le denomina como el *suplemento* del otro.

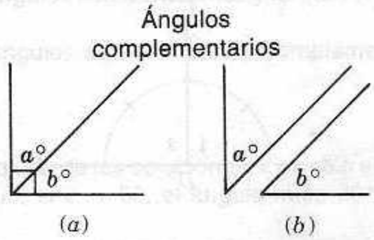


Fig. 1-40

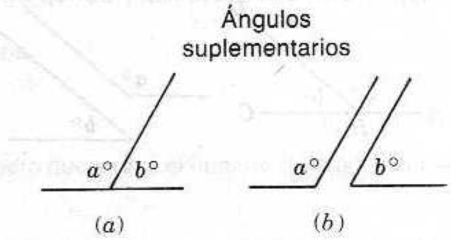


Fig. 1-41

1.7B Principios sobre pares de ángulos

Principio 1: *Si un ángulo de $c°$ se divide en dos ángulos adyacentes de $a°$ y $b°$, entonces $a° + b° = c°$.*
Así, si $a° = 25°$ y $b° = 35°$ en la figura 1-42, entonces $c° = 25° + 35° = 60°$.

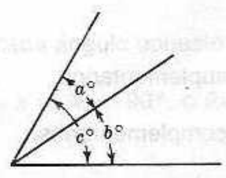


Fig. 1-42

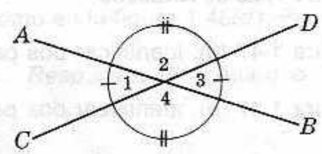


Fig. 1-43

Principio 2: *Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*
Por lo que; si AB y CD son las líneas rectas en la figura 1-43, entonces $\angle 1 \cong \angle 3$ y $\angle 2 \cong \angle 4$. De aquí, si $m\angle 1 = 40°$, entonces $m\angle 3 = 40°$; en este caso, $m\angle 2 = m\angle 4 = 140°$.

Principio 3: *Si dos ángulos complementarios miden $a°$ y $b°$, entonces $a° + b° = 90°$.*
Así, si los ángulos $a°$ y $b°$ son complementarios y $a° = 40°$, entonces $b° = 50°$ [Fig. 1-44(*a*) o (*b*)].

Principio 4: *Los ángulos adyacentes son complementarios si sus lados exteriores son perpendiculares entre sí.*

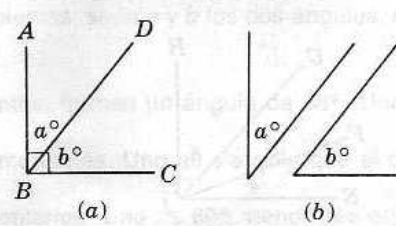


Fig. 1-44

Así pues, en la figura 1-44(*a*), $a°$ y $b°$ son complementarios, ya que sus lados exteriores $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares entre sí.

Principio 5: *Si dos ángulos suplementarios miden $a°$ y $b°$, entonces $a° + b° = 180°$.*
Por consiguiente, si los ángulos $a°$ y $b°$ son suplementarios y $a° = 140°$, entonces $b° = 40°$ [Fig. 1-45(*a*) o (*b*)].

Principio 6: *Los ángulos adyacentes son suplementarios si sus lados exteriores están sobre la misma línea recta.*
Así en la figura 1-45(*a*) $a°$ y $b°$ son ángulos suplementarios, ya que sus lados exteriores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, están sobre la misma línea recta $\overleftrightarrow{AC}$.

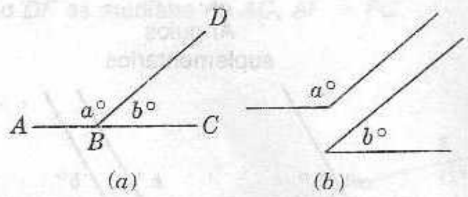


Fig. 1-45

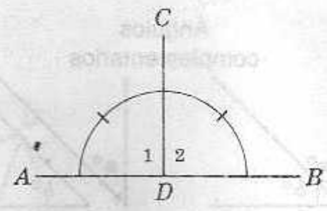


Fig. 1-46

PRINCIPIO 7: *Si los ángulos suplementarios son congruentes; cada uno de ellos es un ángulo recto. (Ángulos suplementarios iguales, son ángulos rectos.)*

Por lo tanto; si ∠1 y ∠2 en la figura 1-46 son congruentes y suplementarios a la vez, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.13 IDENTIFICACIÓN DE PARES DE ÁNGULOS

(*a*) En la figura 1-47 (*a*), identificar dos pares de ángulos suplementarios.

(*b*) En la figura 1-47 (*b*), identificar dos pares de ángulos complementarios.

(*c*) En la figura 1-47 (*c*), identificar dos pares de ángulos opuestos por el vértice.

Soluciones

(*a*) Como su suma es 180°, los ángulos suplementarios son (*1*) ∠1 y ∠*BED*; (*2*) ∠3 y ∠*AEC*.

(*b*) Como su suma es 90°, los ángulos complementarios son (*1*) ∠4 y ∠*FJH*; (*2*) ∠6 y ∠*EJG*.

(*c*) Como $\overleftrightarrow{KL}$ y $\overleftrightarrow{MN}$ son líneas que se intersectan, los ángulos opuestos por el vértice son (*1*) ∠8 y ∠10; (*2*) ∠9 y ∠*MOK*.

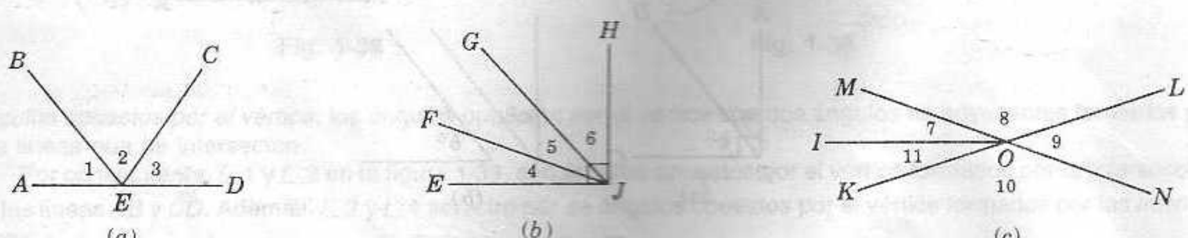


Fig. 1-47

1.14 CÁLCULO DE PARES DE ÁNGULOS

Encuentre dos ángulos tales que:

(*a*) Los ángulos son suplementarios y el mayor es dos veces el menor.

(*b*) Los ángulos son complementarios y el mayor es 20° mayor que el menor.

(*c*) Los ángulos son adyacentes y forman un ángulo de 120°. El mayor es 20° menor que tres veces el menor.

(*d*) Los ángulos son vertilares y complementarios.

Soluciones

En cada una de las soluciones, x es sólo el número que indica el número de grados contenidos en el ángulo. De modo que, si $x = 60$, el ángulo mide 60°.

(*a*) Sea $x = m$ (el ángulo menor) y $2x = m$ (el ángulo mayor), como en la figura 1-48(*a*).
Principio 5: $x + 2x = 180$, así $3x = 180$; $x = 60$.
$2x = 120$. *Respuesta* 60° y 120°

(*b*) Sea $x = m$ (el ángulo menor) y $x + 20 = m$ (el ángulo mayor), como en la figura 1-48(*b*).
Principio 3: $x + (x + 20) = 90$, o $2x + 20 = 90$; $x = 35$.
$x + 20 = 55$. *Respuesta* 35° y 55°

(*c*) Sea x = m (el ángulo más pequeño) y $3x - 20$ = m (el ángulo más grande) como se ve en la figura 1-48(*c*).
Principio 1: $x + (3x - 20) = 120$, o $4x - 20 = 120$; $x = 35$.
$3x - 20 = 85$. *Respuesta* 35° y 85°

(*d*) Sea $x = m$ (cada ángulo opuesto por el vértice), como en la figura 1-48(*d*). Por el Principio 2, éstos son congruentes.
Principio 3: $x + x = 90°$, o $2x = 90$; $x = 45$. *Respuesta* 45° cada uno

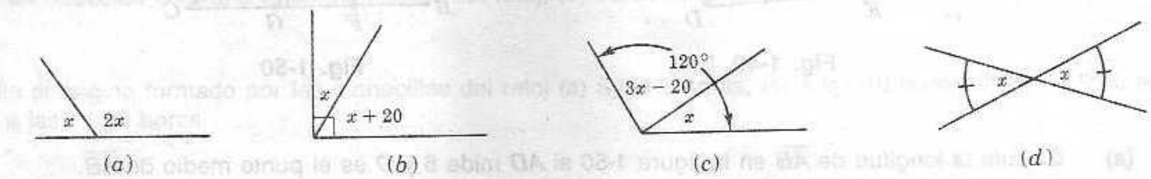


Fig. 1-48

1.15 CÁLCULO DE PARES DE ÁNGULOS UTILIZANDO DOS INCÓGNITAS

En cada uno de los siguientes problemas, sean a y b los dos ángulos, obténgase dos ecuaciones para cada caso, y calcúlense los ángulos.

(*a*) Los ángulos son adyacentes, forman un ángulo de 88°. Uno es 36° mayor que el otro.

(*b*) Los ángulos son complementarios. Uno es el doble que el otro.

(*c*) Los ángulos son suplementarios. Uno es 60° menor que el doble del otro.

(*d*) Los ángulos son dos ángulos de un triángulo, cuyo tercer ángulo mide 40°. La diferencia entre los ángulos es de 24°.

Soluciones

(*a*) $a + b = 88$
$a = b + 36$ *Respuesta* 62° y 26°

(*b*) $a + b = 90$
$a = 2b$ *Respuesta* 60° y 30°

(*c*) $a + b = 180$
$a = 2b - 60$ *Respuesta* 100° y 80°

(*d*) $a + b = 140$
$a - b = 24$ *Respuesta* 82° y 58°

Problemas Complementarios

El número entre paréntesis asociado con cada problema complementario, se refiere al grupo de problemas resueltos que contienen problemas del mismo tipo. Como guía, remítase a ellos.

1. Punto, línea y plano son términos indefinidos. ¿Cuál de éstos es ilustrado por: (*a*) la punta de un lápiz afilado; (*b*) el filo de una navaja de rasurar; (*c*) una hoja de papel; (*d*) el lado de una caja; (*e*) el pliegue de un papel doblado; (*f*) el entronque de dos caminos en un plano? (1.1)

2. (*a*) Identifique los segmentos de línea que intersectan a E en la figura 1-49. (1.2)

(*b*) Identifique los segmentos de línea que intersectan a D.

(*c*) ¿Qué otros segmentos de línea pueden trazarse?

(*d*) Identifique el punto de intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

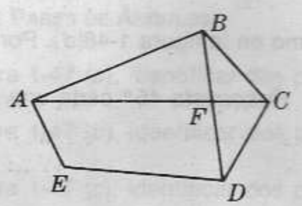


Fig. 1-49

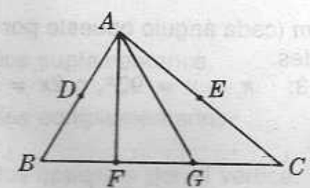


Fig. 1-50

3. (*a*) Calcule la longitud de $\overline{AB}$ en la figura 1-50 si AD mide 8 y D es el punto medio de $\overline{AB}$. (1.3)

(*b*) Calcule la longitud de $\overline{AE}$ si AC mide 21, y E es el punto medio de $\overline{AC}$. (1.3)

4. (*a*) Calcule OB en la figura 1-51, si el diámetro $AD = 36$. (1.4)

(*b*) Calcule el número de grados en $\overset{\frown}{AE}$ si E es el punto medio del semicírculo $\overset{\frown}{AED}$. Calcule el número de grados en (*c*) $\overset{\frown}{CD}$; (*d*) $\overset{\frown}{AC}$; (*e*) $\overset{\frown}{AEC}$.

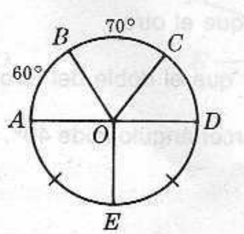


Fig. 1-51

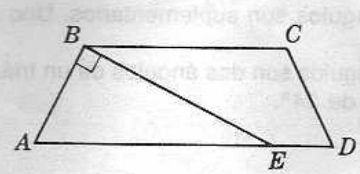


Fig. 1-52

5. Identifique los siguientes ángulos en la figura 1-52: (*a*) un ángulo agudo en B; (*b*) un ángulo agudo en E; (*c*) un ángulo recto; (*d*) tres ángulos obtusos; (*e*) un ángulo derecho. (1.5)

6. (*a*) Hallar $m\angle ADC$ si $m\angle c = 45°$ y $m\angle d = 85°$ en la figura 1-53. (1.6)

(*b*) Hallar $m\angle AEB$ si $m\angle e = 60°$.

(*c*) Hallar $m\angle EBD$ si $m\angle a = 15°$.

(*d*) Hallar $m\angle ABC$ si $m\angle b = 42°$.

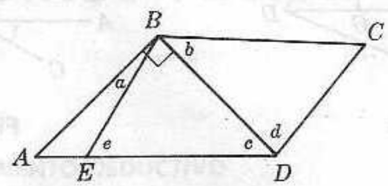


Fig. 1-53

7. Calcule (*a*) $\frac{5}{8}$ de un $\angle$ rectángulo; (*b*) $\frac{2}{3}$ de un $\angle$ derecho; (*c*) $\frac{1}{3}$ de 31°; (*d*) $\frac{1}{5}$ de 45°55'. (1.7)

8. ¿Qué rotación realiza (*a*) la manecilla de las horas en 3 horas; (*b*) la manecilla de los minutos en $\frac{1}{3}$ de hora? ¿Qué rotación se necesita para virar de (*c*) oeste a noreste en dirección de las manecillas del reloj; (*d*) este a sur en dirección contraria a las manecillas del reloj; (*e*) suroeste a noreste en cualquier dirección? (1.8)

9. Halle el ángulo formado por las manecillas del reloj (*a*) a las 3 horas; (*b*) a las 10 horas; (*c*) a las 5:30 horas; (*d*) a las 11:30 horas. (1.9)

10. En la figura 1-54: (1.10)

(*a*) Identifique dos pares de líneas perpendiculares.

(*b*) Encuentre el valor de $m\angle BCD$ si $m\angle 4$ mide 39°.

Si $m\angle 1 = 78°$, calcule (*c*) $m\angle BAD$; (*d*) $m\angle 2$; (*e*) $m\angle CAE$.

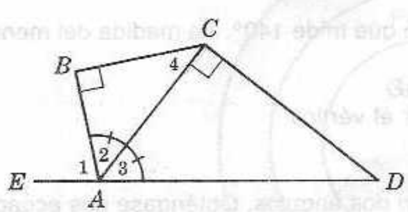


Fig. 1-54

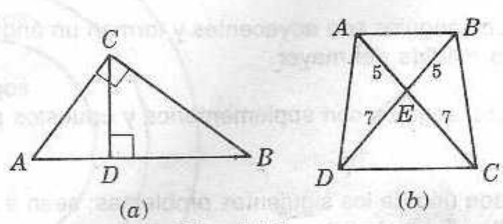


Fig. 1-55

11. (*a*) En la figura 1-55(*a*), identifique tres triángulos rectángulos, y la hipotenusa y catetos de cada uno. En la figura 1-55(*b*), (*b*) identifique dos triángulos obtusos y (*c*) dos triángulos isósceles; identificando también sus lados, base y el ángulo del vértice en cada uno. (1.11)

12. En la figura 1-56, identifique las líneas y ángulos congruentes (*a*) si PR es mediatriz de $\overline{AB}$; (*b*) si BF es bisectriz de $\angle ABC$; (*c*) si $\overline{CG}$ es una altura sobre $\overline{AD}$; (*d*) si $\overline{EM}$ es la mediana de $\overline{AD}$. (1.12)

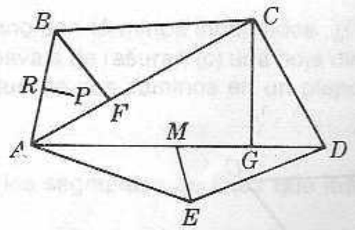


Fig. 1-56

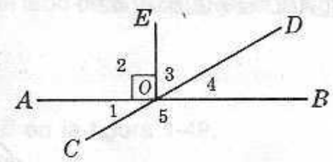


Fig. 1-57

13. En la figura 1-57, indicar la relación entre: (1.13)

(*a*) $\angle 1$ y $\angle 4$

(*b*) $\angle 3$ y $\angle 4$

(*c*) $\angle 1$ y $\angle 2$

(*d*) $\angle 4$ y $\angle 5$

(*e*) $\angle 1$ y $\angle 3$

(*f*) $\angle AOD$ y $\angle 5$

14. Hallar dos ángulos tales que: (1.14)

(*a*) Los ángulos son complementarios y la medida del menor es 40° menor que la medida del mayor.

(*b*) Los ángulos son complementarios y la medida del mayor es cuatro veces la medida del menor.

(*c*) Los ángulos son suplementarios y la medida del menor es la mitad de la medida del mayor.

(*d*) Los ángulos son suplementarios y la medida del mayor es 58° mayor que la medida del menor.

(*e*) Los ángulos son suplementarios y la medida del mayor es 20° menor que tres veces la medida del menor.

(*f*) Los ángulos son adyacentes y forman un ángulo que mide 140°. La medida del menor es 28° menor que la medida del mayor.

(*g*) Los ángulos son suplementarios y opuestos por el vértice.

15. Para cada uno de los siguientes problemas; sean *a* y *b* dos ángulos. Obténgase dos ecuaciones en cada caso, y calcúlense los ángulos. (1.15)

(*a*) Los ángulos son adyacentes y forman un ángulo que mide 75°. Su diferencia es de 21°.

(*b*) Los ángulos son complementarios. Uno mide 10° menos que tres veces el otro.

(*c*) Los ángulos son suplementarios. Uno mide 20° más que cuatro veces el otro.